30/10/19

§3. Ολοκληρώματα - Παράγωγοι

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: $f : [\alpha,\beta] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη

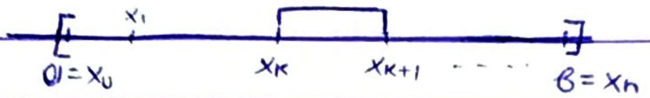
(δηλ. $\exists M>0 : |f(x)| \leq M \quad x \in [\alpha,\beta]$)

f λέγεται Riemann ολοκληρώσιμη αν-ν

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists P=\{x_0=\alpha<x_1<\dots<x_n=\beta\} : U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$

όπου $$U(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1} \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)\,(x_{k+1}-x_k)$$

$$L(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1} \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)\cdot(x_{k+1}-x_k)$$



$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \sup_{P \text{ διαμ.}} L(f,P)$$

<u>Πρόταση</u>: $P_1 \subseteq P_2 \Rightarrow U(f,P_1) \geq U(f,P_2) \geq L(f,P_2) \geq L(f,P_1)$

Κλασσικές ιδιότητες: Γνωστές

<u>π.χ.</u> · f ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$

$[\gamma,\delta] \subseteq [\alpha,\beta]$

$\Rightarrow f$ ολοκληρώσιμη στο $[\gamma,\delta]$

· $$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx$$

• $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$

$f(x)=u(x)+iv(x)$

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta u(x)\,dx + i\int_\alpha^\beta v(x)\,dx$$

$f'(x) = u'(x) + i \cdot v'(x)$

$\Uparrow$

και $\quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Πρόταση: $f : [a,b] \to \mathbb{C}$

$F : [a,b] \to \mathbb{C}$ αρχική της f $(F' = f)$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Παρατήρηση: $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ παραγώγισιμη

$g : \overset{\text{ανοικτό}}{\Omega} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, $f([a,b]) \subseteq \Omega$

$$(g \circ f(x))' = f'(x) \cdot g'(f(x))$$

Συμβολ.: $R([a,b]) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{C} \mid f \text{ Riemann ολοκλ.} \}$

Πρόταση: $\{f_n\} \subseteq R([a,b])$

Αν $f_n \xrightarrow{\text{ομοιόμ.}} f$ τότε $f \in R([a,b])$ κ.

$$\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

Ο συμβολ. με lim είναι κατά σημείο σύγκλιση

$\boxed{\text{ΠΑΡΑΔ}}$: $e_n(x) = e^{inx}$, $x \in [0, 2\pi]$

$(= \cos nx + i \sin nx)$

$$\int_0^{2\pi} e_n(x)\,dx = ;$$

C_μ $f : x \in [0, 2\pi] \to inx = 0 + inx \xrightarrow{g(z) = e^z} \mathbb{C}$

$$(e_n(x))' = in e^{inx}$$

$$F(x) = \frac{1}{in} e^{inx} \quad \to F' = \frac{1}{\cancel{in}} \cancel{in} e^{inx} = e_n(x)$$

$$\int_0^{2\pi} e_n(x)\,dx = F(x)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2n} e^{in\cdot 2\pi} - \frac{1}{n} e^{in\cdot 0} = 0$$

<u>Πρόταση</u>: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$) φραγμένη

Έστω ότι $\forall \delta > 0$: $f \in R([a, \gamma - \delta])$, $f \in R([\gamma + \delta, b])$

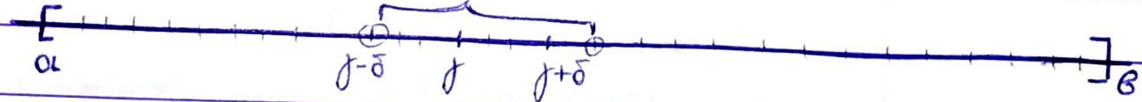
όπου $\gamma \in (a, b)$

Τότε: $f \in R([a, b])$

<u>Απόδ.</u>:

Από υπόθεση: $\forall \delta > 0$ $\exists P_1$ διαμέριση του $[a, \gamma - \delta]$, $\exists P_2$ διαμέριση του $[\gamma + \delta, b]$:

$$U(f, P_i) - L(f, P_i) < \varepsilon, \quad i = 1, 2$$



$$P = P_1 \cup \{\gamma - \delta\} \cup \{\gamma + \delta\} \cup P_2$$

$$U(f, P) = U(f, P_1) + \sup_{\gamma - \delta \le x \le \gamma + \delta} f(x) \cdot 2\delta + U(f, P_2)$$

$$L(f, P) = L(f, P_2) + \inf_{\gamma - \delta \le x \le \gamma + \delta} f(x) \cdot 2\delta + L(f, P_2)$$

$\downarrow$

$$U(f,P) - L(f,P) = \overbrace{U(f, P_1) - L(f, P_1)}^{< \varepsilon/3} + \overbrace{(\sup f(x) - \inf f(x)) \cdot 2\delta}^{\le 2M \cdot 2\delta} + \underbrace{U(f, P_2) - L(f, P_2)}_{< \varepsilon/3}$$

$\rightarrow$

Άρα αν παίρνουμε $\delta < \frac{\varepsilon/3}{4M}$ τότε

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon \quad \blacksquare$$

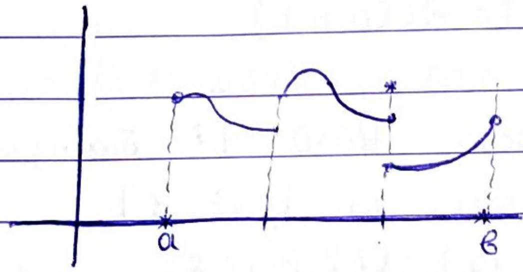
<u>Σχόλιο</u>: 1) Αν f φραγμένη $\forall f \in R([a+\delta, b])$ $\forall \delta > 0$ τότε $f \in R([a,b])$

2) Στην πρόταση ισχύει ότι

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta \to 0}\left(\int_a^{\gamma-\delta} f + \int_{\gamma+\delta}^{b} f\right)$$

• <u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$)

Η f λέγεται κατά τμήματα συνεχής αν $\exists P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b\}$ ώστε f συνεχής σε κάθε (x_k, x_{k+1}), $k = 0, 1, \dots, n-1$



<u>Πρόταση</u>: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ φραγμένη κ. κατά τμήματα συνεχής

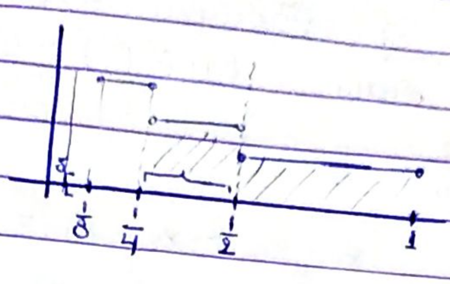
$\Updownarrow$

$P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$

Τότε: $f \in R([a,b])$ κ. $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$

Σχόλιο: Αν αλλάξουμε μια συν/ση σε ένα σημείο το ολοκλήρωμα Riemann δεν αλλάζει.

ΑΣΚΗΣΗ



$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \\ 1 + \frac{1}{2}, & x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, & x \in \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right) \\ \vdots & \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}, & x \in \left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right) \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

Ορισμό + Θεώρ. $\Rightarrow$ f R. ολοκλ.

HW: $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

Θεωρώ μια αύξουσα ακολ. που συγκλ. στο 1

$0 < r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots < 1$, $r_n \to 1$

κ' έστω $f_n(x) = \frac{1}{n^2} \cdot f(x - r_n)$, $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

α) Κάνετε τη γρ. παράσταση της $f_n(x)$, $F(x)$

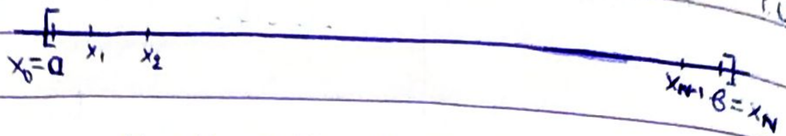
β) Δ.Ο. $F(x) \in R([0,1])$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ:
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
- Θα χρησιμοποιήσετε το Κριτ. Weierstrass κ' το Θεώρ. για Ομοιόμ. Συγκλ. κ' ολοκλ. Riemann (Πρόταση)

HW: $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ μονότονη (όχι κατ' ανάγκη γνήσια μονότονη) κ' φραγμένη

Ν.δ.ο. $f\in R([a,\beta])$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Θεωρώ $\varepsilon>0$ κ'
$\exists P$ διαμ.: $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$ τ.ω.



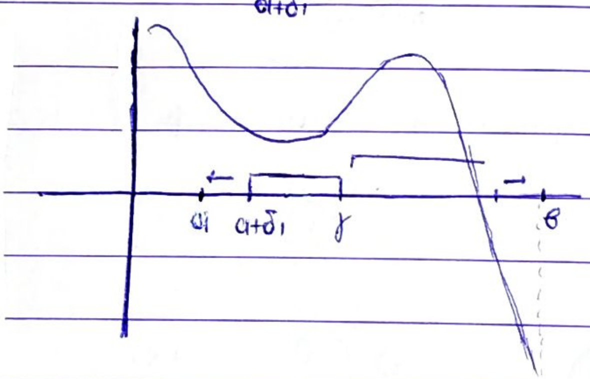
$$x_1-x_0=x_2-x_1=\dots=x_N-x_{N-1}=\frac{\beta-a}{N}$$

§4. Γενικευμένα ολοκληρώματα

- $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$

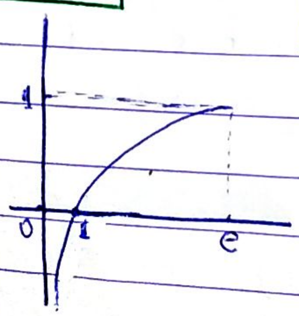
$f\in R([\gamma,\delta])$ $\forall \gamma,\delta: a<\gamma<\delta<\beta$

$$\int_a^\beta f(x)\,dx=\lim_{\delta_1\to0}\int_{a+\delta_1}^{\gamma} f(x)\,dx+\lim_{\delta_2\to0}\int_{\gamma}^{\beta-\delta_2} f(x)\,dx \quad (\text{αν } \exists)$$



όπου γ αυθαίρετο

ΠΑΡΑΔ.: $f(x)=\begin{cases}\ln x, & 0<x\le e\\ 0, & x=0\end{cases}$



$\gamma=1$,
Αρκεί να βρούμε το όριο:

$$\int_\delta^1 \ln x\,dx=\int_\delta^1 (x)'\ln x\,dx=$$

$$= [x \ln x]_{\delta}^{1} - \int_{\delta}^{1} x \cdot \frac{1}{x} \, dx = 0 - \delta \ln \delta - (1 - \delta)$$

$$\lim_{\delta \to 0} \left(-\delta \ln \delta - (1 - \delta) \right) = \lim_{\delta \to 0} \left(\frac{-\ln \delta}{1/\delta} - (1 - \delta) \right)$$

$$\frac{-\ln \delta}{1/\delta} \xrightarrow{\text{D.L.H.}} 0$$

$$= 0 - 1 = -1$$